ЛЕКЦИЯ № 20

Гамильтонова механика. Скобки Пуссона.

…скобка Пуассона таила в себе замечательные возможности, и я подумал, что, может быть, мне удастся сделать великое открытие.

П.А.М.Дирак

Рассмотренный в предыдущей лекции подход Гамильтона к механике оказался необычайно важным для создания квантовой механики и выяснения связи меэжу этими двумя механиками. Хотя от формулировки уравнений Гамильтона (1835) в классической механике до формулироваки уравнений Гайзенберга (1925) в квантовой механике и прошло 90 лет. Аналогичная история произошла со *скобками Пуассона*. Со времени их введения в механику Пуассоном до формулировки на их основе Дираком нового подхода к квантовой механике прошло около 100 лет. Какая связь между этими событиями?

Уравнения Гамильтона дают нам эволюцию со временем координат и импульсов – основных переменных гамильтонова подхода. Одновременно они дают нам временную эволюцию произвольных механических величин $f(q_i(t), p_i(t), t)$, зависящих от координат, импульсов и времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \tag{20.1}$$

Возникшая здесь *антисимметричная* комбинация носит название ***скобок Пуассона*** для величин H и f и обозначается так:

$$\{Hf\} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \tag{20.2}$$

(Заметим, что из-за антисимметрии этой операции важна последовательность дифференцирования по разным переменным. В некоторых учебниках используется другое обозначение скобок Пуассона $(fg) = -\{fg\}$).

Таким образом, эволюция во времени механических величин в гамильтоновых системах определяется уравнением

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{Hf\}. \tag{20.3}$$

Отсюда следует, что величина f является интегралом движения, если для нее выполняется уравнение $\partial f / \partial t + \{Hf\} = 0$. Если же интеграл движения не зависит явно от времени, то его скобки Пуассона с гамильтонианом обращаются в ноль: $\{Hf\} = 0$.

Скобки Пуассона можно ввести для любой пары функций, зависящих от двух наборов переменных (q_i) и (p_i), по следующему правилу:

$$\{fg\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{20.4}$$

Из определения скобок Пуассона следует их антисимметрия:

$$\{fg\} = -\{gf\}, \tag{20.5}$$

Кроме этого, прямой подстановкой проверяются такие свойства этих скобок:

$$\{fc\} = 0, \tag{20.6}$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \tag{20.7}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}. \tag{20.8}$$

Удовлетворяется также так называемое *тождество Якоби*, которое мы докажем ниже:

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0. \tag{20.9}$$

На математическом языке приведенные свойства (20.5-20.9) обозначают, что мы имеем дело с так называемой ***алгеброй Ли***. Такой алгеброй называется система, в которой введена билинейная операция, обладающая свойствам антикомутативности (20.5) и в которой выполняется тождество Якоби (20.9). Примером алебры Ли является трехмерное векорное пространство относительно весторного произведения. Как известно из вектороного анализа имеют место соотношения $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$ и $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] = 0$.

В случае гамильоновой механики роль билинейной антикоммутативной операции играют скобки Пуассона. При этом уравнение (20.3) можно рассматривать в качестве одной из формулировок классимеской механики. При формулировке квантовой теории Дирак вспомнил о ней, поскольку

Гайзенберг столкнулся с некомутативностью квантовых величин. Дирак сформулировал связь классической и квнтовой механики в словах: «Соотношение квантовой и классической теорий состоит не столько в предельном согласии при $\hbar \to 0$, сколько в том, что математические операции двух теорий подчиняются одним и тем же законам». Сравните уравнения классической механики в форме скобок Пуассона и квантовой механики:

$$\frac{df}{dt} = \{Hf\}, \qquad \frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\hat{f}\right], \tag{20.10}$$

где $\left[\hat{f}\hat{q}\right] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ – антисимметричная билинейная операция – *антикоммутатор операторов*. Т.е. классическая и квантовая механика оказались связанными в математическом плане, как описываемые в рамках одинаковой алгебры с заменой классических скобок Пуассона на квантовые коммутаторы. (Заметьте, что скобки Пуассона содержат в знаменателе $\partial q \partial p$, т.е размерность действия, ту же, что и константа Планка в квантовом уравнении (20.10)).

Докажем тождество Якоби. Для этого удобно ввести так называемые *симплекктические координаты*, объединяющие, как равные, координаты и импульсы $x_i = (p_1, p_2, ..., p_s; q_1, q_2, ..., q_s) = (x_1, x_2, ..., x_s; x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_{2s})$ системы с s степенями свободы. Кроме того, введем $2s \times 2s$ матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 - E \\ + E \;\; 0 \end{pmatrix} \tag{20.11}$$

с единичными $s \times s$ диагональными матрицами E. Тогда уравнения Гамильтона записываюися единым образом, как

$$\dot{x}_i = J_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad i, k = 1, 2, ..., 2s. \tag{20.12}$$

В симплектических координатах скобки Пуассона записываюися так:

$$\{f_1 f_2\} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial f_2}{\partial x_k}. \tag{20.13}$$

Подставляем эти выражения в тождество Якоби (20.9):

$$
-\frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\{gh\} - \frac{\partial g}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\{hf\} - \frac{\partial h}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\{fg\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial h}{\partial x_m}\right) + \frac{\partial g}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial h}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) + \frac{\partial h}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial g}{\partial x_m}\right) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_l} J_{lm} \frac{\partial h}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial g}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k \partial x_l} J_{lm} \frac{\partial f}{\partial x_m} + \\
&+ \frac{\partial g}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial h}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} J_{lm} \frac{\partial g}{\partial x_m} + \frac{\partial h}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_m} = 0
\end{aligned} \qquad (20.14)
$$

Производя в первом слагаемом следующие замены: $i \leftrightarrow l$, $m \leftrightarrow i$ и $k \leftrightarrow m$, приводим его к виду $(\partial h / \partial x_i) J_{ki} (\partial f / \partial x_l) J_{lm} (\partial^2 g / \partial x_k \partial x_m)$, который отличается от последнего слагаемого только заменой $J_{ik} \to J_{ki}$. Поскольку из (20.11) матрица J антисимметрична, то первое и последнее слагаемые отличаются только знаком и взаимно сокращаются. То же относится и к другим парам слагаемых.

Тождество Якоби позволяет доказать важную для механики доказанную Пуассоном теорему.

Теорема Пуассона: Если функции $f_1(p,q,t)$ и $f_2(p,q,t)$ являются интегралами канонических уравнений, то их скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ также является интегралом движения.

Прежде всего, из (12.13) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{f_1, f_2\} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) J_{ik} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\
&= \left\{\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right\} + \left\{f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}
\end{aligned} . \qquad (20.15)
$$

Возьмем *полную производную* от скобок Пуассона. Из (20.3) для $\{f_1 f_2\}$ с использованием тождества Якоби имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{f_1, f_2\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f_1 f_2\} + \{H\{f_1 f_2\}\} = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial t} f_2\right\} + \left\{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t}\right\} - \{f_1\{f_2 H\}\} - \{f_2\{H f_1\}\} = \\
&= \left\{\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{H f_1\}\right), f_2\right\} + \left\{f_1\left(\frac{\partial f_2}{dt} + \left\{H \frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}\right)\right\} = \left\{\frac{df_1}{dt}, f_2\right\} + \left\{f_1, \frac{df_2}{dt}\right\}
\end{aligned} \qquad (20.16)
$$

Поскольку f_1 и f_2 – интегралы движения, то $df_1/dt = 0$ и $df_2/dt = 0$, то из (20.16) следует, что $d\{f_1 f_2\}/dt = 0$ и $\{f_1 f_2\}$ – интеграл движения.

Тождество Якоби дает возможность в некоторых случаях по известным двум интегралам движения строить дополнительный интеграл, хотя в большинстве случаях мы будем получать функцию уже известных интегралов.

В заключение отметим, что если в определение скобок Пуассона (20.4) подставить частные выражения $f = p_i, g = p_k$, $f = q_i, g = q_k$ и $f = p_i, g = q_k$, томы получим соотношения

$$\{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}, \tag{20.17}$$

с которыми мы столкнемся в курсе квантовой механики.